Урок №14 (21.02.2007)
Переходные процессы в RC и RL цепочках.

1. *RC-цепочка, заряд конденсатора*

Рассмотрим цепь из последовательно соединенных сопротивления R, конденсатора C и источника постоянного тока с ЭДС U. Пусть цепь вначале разомкнута, а в момент времени «0» цепь замыкают.

Очевидно, что т.к. цепь разорвана конденсатором, то через бесконечно большое время ток по ней течь не будет. С другой стороны, в начальный момент конденсатор не заряжен и ток в цепи будет, причем его величина будет определяться только наличием сопротивления R. Процесс перехода от начального состояния к конечному, называется *переходным процессом*.

Запишем правило Кирхгофа для нашей цепи в произвольный момент времени: $U = I(t)R + \dfrac{Q(t)}{C}$, где $Q(t)$ – заряд на конденсаторе в некоторый момент времени, для которого мы записали уравнение, а $I(t)$ – сила тока в этот момент.

Заметим, что скорость, с которой заряд протекает через резистор ($I(t) = dQ(t)/dt$), равна скорости, с которой он накапливается на конденсаторе. Поэтому

$$U = R\frac{dQ(t)}{dt} + \frac{1}{C}Q(t).$$

Теперь нам требуется найти функцию $Q(t)$. Преобразуем уравнение:

$$\frac{dQ}{Q-CU} = -\frac{dt}{RC},$$

$$\int\frac{dQ}{Q-CU} = -\int\frac{dt}{RC},$$

$$\ln(Q-CU) = -\frac{t}{RC} + const.$$

Значение константы находится из начальных условий: $Q = 0$ при $t = 0$, откуда

$$const = \ln(-CU).$$

Подставляя найденное значение, получим:

$$\ln(Q-CU) - \ln(-CU) = -\frac{t}{RC},$$ или

$$\ln\left(1-\frac{Q}{CU}\right) = -\frac{t}{RC}.$$

Избавляясь от логарифма, получим

$$1-\frac{Q}{CU} = e^{-t/RC},$$ или

$$Q(t) = CU\left(1-e^{-t/RC}\right).$$

Величина RC называется *постоянной времени* RC-цепочки: чем она больше, тем дольше длится переходной процесс.

Продифференцировав функцию $Q(t)$, найдем зависимость тока в цепи от времени:

$$I(t) = \frac{dQ(t)}{dt}, \text{ или}$$

$$\boxed{I(t) = \frac{U}{R} e^{-t/RC}} \text{ – заряд в } RC\text{-цепочке.}$$

Как и ожидалось, в начальный момент времени ток равен $\frac{U}{R}$, т.е. будто в цепи конденсатора нет.

2. RC-цепочка, разряд конденсатора

Пусть конденсатор заряжен до заряда Q_0 и начинает разряжаться через сопротивление R. В этом случае

$$I(t)R + \frac{Q(t)}{C} = 0,$$

$$\frac{dQ}{dt}R + \frac{Q}{C} = 0.$$

Разделим переменные:

$$\frac{dQ}{Q} = -\frac{dt}{RC}, \text{ интегрируя с обеих сторон, получаем:}$$

$$\ln(Q) = -\frac{1}{RC} + const.$$

Находим константу из условия $Q(0) = Q_0$:

$$const = \ln Q_0.$$

Подставляя, получаем выражение для $Q(t)$:

$$\ln Q - \ln Q_0 = \ln\left(\frac{Q}{Q_0}\right) = -\frac{t}{RC},$$

$$Q(t) = Q_0 e^{-t/RC}.$$

Для тока:

$$I(t) = \frac{dQ}{dt} = -\frac{Q_0}{RC} e^{-t/RC}, \text{ или}$$

$$\boxed{I(t) = I_0 e^{-t/RC}} \text{ – разряд в } RC\text{-цепочке.}$$

3. RL-цепочка, заряд

Теперь проделаем те же выкладки для RL-цепочки, включенной последовательно с ЭДС U. По закону Кирхгоффа:

$$U - L\frac{dI(t)}{dt} = I(t)R,$$

$$\frac{dI}{U - IR} = \frac{dt}{L},$$

$$\int \frac{dI}{U - IR} = \int \frac{dt}{L},$$

$$-\frac{1}{R}\ln\left(\frac{U - I(t)R}{U}\right) = \frac{1}{L}t + const \text{, или}$$

$I(t) = \frac{U}{R}\left(1 - e^{-t/\tau + const}\right)$, где $\tau = L/R$ – *постоянная времени* RL-цепочки.

Т.к. в начальный момент времени ток равен нулю (т.к. катушка имеет в этот момент ЭДС самоиндукции практически равный U), то $const = 0$ и окончательно:

$\boxed{I(t) = \frac{U}{R}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)}$ – заряд в RL-цепочке.

4. RL-цепочка, разряд

Для разряда получаем аналогично:

$$L\frac{dI}{dt} + RI(t) = 0,$$

$$\int \frac{dI}{I} = -\int \frac{R}{L}dt,$$

$$\ln\left(I(t)\right) = -\frac{R}{L}t + const,$$

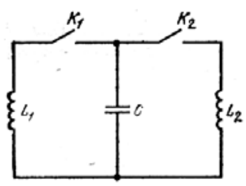
при этом $I(0) = I_0$, следовательно $const = \ln(I_0)$.

$$\ln\left(\frac{I(t)}{I_0}\right) = -\frac{R}{L}t,$$

$\boxed{I(t) = I_0 e^{-t/\tau}}$ – разряд в RL-цепочке.

Теперича надо обязательно порисовать графики, чтобы всё стало понятно. ☺

5. Задачка на закуску



Две катушки с индуктивностями L_1 и L_2 подключены через ключи K_1 и K_2 к конденсатору емкости C. В начальный момент времени оба ключа разомкнуты, а конденсатор заряжен до разности потенциалов V_0. Сначала замыкают ключ K_1 и, когда напряжение на конденсаторе станет равным нулю, замыкают ключ K_2. Определить максимальный и минимальный токи, протекающие через катушку L_1 после замыкания ключа K_2. Сопротивлениями катушек пренебречь.

Решение. Из закона сохранения энергии $\frac{L_1 I^2{}_{\max}}{2} = \frac{CU_0^2}{2}$, откуда $I_{\max} = U\sqrt{\frac{C}{L}} = I_0$.

Т.к. в любой момент времени $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, то $L_1 \frac{dI_1}{dt} = L_2 \frac{dI_2}{dt}$, откуда $L_{1\Delta} I_1 = L_{2\Delta} I_2$, и для любого момента времени $L_1\left(I_1\left(t\right) - I_0\right) = L_2 I_2\left(t\right)$.

С другой стороны в момент, когда ток на катушке *1* минимален (или максимален), $\frac{dI_1}{dt} = 0$, $\varepsilon_1 = 0$ и заряд на конденсаторе равен нулю. Следовательно в этот момент вся энергия сосредоточена в катушках и закон сохранения энергии в этот момент приобретает вид: $\frac{L_1 I_1^2}{2} + \frac{L_2 I_2^2}{2} = \frac{L_1 I_0^2}{2}$.

В итоге, для моментов времени, при которых ток через катушку максимален или минимален, получаем систему:

$$\begin{cases} L_1\left(I_1 - I_0\right) = L_2 I_2 \\ L_1 I_1^2 + L_2 I_2^2 = L_1 I_0^2 \end{cases}.$$

Решая ее, получаем два корня:

$$I_{1,2} = I_0 \frac{\gamma \pm 1}{\gamma + 1}, \text{ где } \gamma = \frac{L_1}{L_2}.$$ ■